***Chap. 1 : v.a. continue dans ℝ***

1. **Définition densité de probabilité**

Une fonction numérique f est une densité (de probabilité) si :

* Elle est continue, c'est à dire si elle est définie sur ℝ ou un ensemble d’intervalle de ℝ (elle peut présenter quelques points de discontinuité, en général deux)
* Elle est non négative

m

n

* Elle est intégrable



**Exemple** : f est définie ainsi :

f (x) = 2x, si x Є [0, 1]

f (x) = 0 ailleurs

2

0 1



* ***Calcul de la probabilité d’un intervalle [a ; b] :***

**f (a, b) =**



**Exemple** : P (−1 < X < ) = f (−1 ; )



P (−1 < X < ) = P (−1 < X < 0) + P (0 < X < )



= f (−1 ; 0) + f (0 ; )



= +



=[x² =



* ***Par rapport au domaine discret :***

f (x) dx → P

Correspond : la probabilité ⟺ la surface

1. **La fonction de répartition**

**x → F(x) = P(X<x) =**



Ainsi F est la primitive de f et par conséquent, f est la dérivée de F  f’ = F

**Rappel** : f(x) 🡲 x est une variable

F(x) 🡲 x est une valeur

**Exemple** : f est définie par

1. f(x) = 0 si x < 0
2. f(x) = 2x si x Є [0, 1]
3. f(x) = 0 si x > 1

⇒ F(x) =



F(x) =



F(x) =



2x

f

0 1

1

x²

F

1. **Moments, mode et médiane**

**Mode** : l’intervalle modal est un intervalle pour lequel la densité de probabilité est la plus élevé.

Max

f

a x1 x2

Le mode est rarement utilisé comme indicateur de tendance centrale pour des variables continues.

**Médiane (M**) : la médiane est la valeur de la distribution tel que F (M) = ⇒ c’est un indicateur de tendance centrale très utilisé pour les variables continues, en particulier dans tout ce qui est distribution de revenus, patrimoine…



Elle présente l’avantage par rapport à la moyenne de restreindre le choix des valeurs extrêmes de la distribution.

F (x) = P(X < x)

F (M) = P(X < M)

**F (M)** **=**



**Exemple** : f(x) = 2X si x Є [0 ; 1]

f(x) = 0 ailleurs

f(x)

F(M) =



⇒ [x² = 0,5



M² −0² = 0,5

M² −0,5 = 0

(M− = 0



M = = = 0,72



M = − 🡲 éliminée



2

**0,5**

**0,5**

M 1

**Moments** : on appelle moment simple d’ordre 𝔯 le réel mr.

mr (x) =



**mr (x) =**



Le **moment simple d’ordre 1** de la variable aléatoire x s’appelle l’espérance mathématique.

m1 (x) = E(x)

E(x) =



**E(x) =**



⇒ **Moment simple d’ordre 2 de la variable centrée** :

m2 = =



**⇒ Moment simple d’ordre 2 de la variable discrète** :

m2 = =



m2  =

**Théorème de König :**

V(X) = E(X²) – E(X)²

⇒ E(X²) = m2 (X)



m1 = E(X)

m2 = E(X²)

**Exemple** : calcul de E (X)

E(X) =



E(X) =



=



=2 × [ = 2 [] = = 0, 666



V(X) = E(X²) – E(X)²

E(X²) = [



V(X) = =



1. **Loi uniforme**

**Définition** : une variable aléatoire X dite continue, de paramètres a et b.

X → U (a, b)

f (x) =



f x) = 0 ailleurs



**1**

a x b **x**

On vérifie les conditions pour que f soit une densité :

1. f est ≥0 b ≥ a ⇒ b – a ≥ 0 ⇒ ≥ 0



1. f est intégrable
2. f continue sauf sur un certain nombre limité (a, b)



?



1



Fonction de répartition d’une variable continue :

1. F(x) = 0 si x < 0
2. si x Є [a ; b] 🡲 F(a) = 0, x = 0, / F(b) = 0, x = b,



1. F(x) = 1 si x > b

1

f est une fonction absolument continue

a b

Démonstration :

1. Si x < a, F(x) =



1. Si a < x < b, F(x) =



= 0 +



1. F(x) = +



= 0 + 1 + 0 = 1